Peter Simons

Frege 2.0. Was Frege gesagt hätte, wenn er gewusst hätte, was wir heute wissen (und was er vielleicht hätte sagen sollen)

Zusammenfassung: Der Widerspruch im Herzen des logischen Systems Freges zwingt zu einer Revision seiner Annahmen. Es fragt sich, wie er sein System hätte anders bauen können, wenn er von vorneherein die Gefahr eines Widerspruchs erkannt hätte. In diesem Beitrag wird versucht zu zeigen, wie und warum der Widerspruch entstand, und wie man erkennbar Frege'sche Ziele in der Philosophie der Mathematik erreichen kann. Es stellt sich heraus, dass Freges Kritik am Formalismus standgehalten und sein Platonismus verworfen werden können, indem man Freges Beschränkung der Namen auf Singulärterme aufhebt zugunsten einer Logik mit Pluraltermen erster sowie höherer Ordnung.

1. Einleitung

Es wird in diesem Beitrag der kontrafaktische und zugegebenerweise auch anachronistischer Versuch gemacht, einen Frege vorzustellen, der das weiß, was wir heute wissen, insbesondere über die Quellen des katastrophalen Widerspruchs in seinem logischen System der *Grundgesetze der Arithmetik*. Wir stellen die Fragen: Was hätte er besser machen können, was würde er heute tun, was *sollte* er im Lichte unseres heutigen Wissenstands tun, um möglichst viel von seinen Ideen vor dem Abgrund zu retten, und also erkennbar "Frege 2.0" zu sein?

2. Warum Grundgesetz V?

Freges logisches System scheiterte bekanntlich an der Kontradiktion, die Bertrand Russell darin entdeckte. Frege identifizierte gleich die Quelle der Inkonsistenz: sein fünftes Grundgesetz (GgV). Hier in einer etwas modifizierten Symbolik:

GgV $\qquad \vdash (\mathrm{W}x[f(x)] = \mathrm{W}y[g(y)]) = \forall x[f(x) = g(x)]$

wo W den Wertverlaufsoperator ist und die sonstigen logischen Konstanten wie üblich sind. In Worten:

> Der Wertverlauf der Funktion *f* ist identisch mit dem Wertverlauf der Funktion *g* genau dann, wenn *f* und *g* immer denselben Wert für dasselbe Argument haben (d.h., wenn sie koextensional sind).

Trotz mancher Versuch, die eigentliche Quelle woanders unter Freges Annahmen zu plazieren, bleibt seine Diagnose die beste. Natürlich konnte GgV nur zu einem Widerspruch führen, weil andere Annahmen des Systems – etwa, dass die Logik Funktionsvariablen quantifiziert – operativ sind, aber diese sonstige Annahmen sind, je für sich und auch zusammengenommen, ohne GgV harmlos. Wir bleiben also bei GgV als die eigentliche Quelle und fragen: Warum Grundgesetz V?

Frege brauchte die Wertverläufe, um eine logizistische Deutung der Zahlen (natürlich wie reell) als logische Gegenstände zu geben. Freges ontologisches Universum teilt sich in Gegenstände einerseits und Funktionen andererseits. Es gibt verschieden Arten von Funktionen, je nach Art und Anzahl ihrer Argumente, aber nur eine Art von Gegenständen. Gegenstände sind dasjenige, das durch geschlossene, "gesättigte" Ausdrücke oder "Eigennamen" bedeutet werden. Da es nicht mehrere Arten gibt, in welchen ein Ausdruck gesättigt ist – Ausdrücke sind *halt* gesättigt – kann es nicht mehrere Arten von Gegenstand geben. Freges Ontologie ist und bleibt in perfekter Harmonie mit seinem Syntax. Deswegen sind für Frege Phrasen wie '2 + 3 = 5' auch Eigennamen, die besondere Gegenstände – die Wahrheitswerte – bedeuten. Um zu *urteilen* bzw. *behaupten*, dass 2 plus 3 gleich 5 ist, muss man den Wahrheitswert der Phrase '2 + 3 = 5' als das Wahre mental bzw. sprachlich anerkennen. In der Symbolik wird dies durch den Urteilsstrich '|' in Kombination mit dem Inhaltsstrich (später, Waagerechten) '–', also zusammen '⊦', zum Ausdruck gebracht. Wir dürfen daher '2 + 3 = 5' nicht zu Deutsch als '2 plus 3 *ist* gleich 5' lesen, sondern eher als 'das Gleichsein von der Summe von 2 und 3 mit 5', eine Nominalphrase also, wo jedes Behaupten oder Urteilen noch ausbleibt. Um das Urteil bzw. die Behauptung auszudrücken, kann man dazu '… ist der Fall' hinzufügen und somit einen Satz erhalten, der dem Deutschen '2 plus 3 ist gleich 5' logisch synonym ist.

Zahlen sind Gegenstände, weil Ausdrücke wie '2', 'die kleinste Primzahl', '+√4', '$(3^3–(5.3))/6$', 'die grösste Zahl *n,* für die die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ nichttriviale Lösungen hat' erganzungsunbedürftige Eigennamen sind, so dass die Zahlen die Gegenstände sind, die wir mithilfe solcher Eigennamen bezeichnen. Warum aber verwendet Frege GgV, um sehr indirekt an diese Gegenstände zu gelangen, statt einfach die Zahlen als Gegenstände zu postulieren?

Der Grund liegt in Freges Forderung, dass die *Anwendung* der Zahlen in sogenannten Zahlangaben so zu berücksichtigen sind, dass jedwede Anwendung in der Definition der einzelnen Zahlen sowie im Gattungsbegriff im Prinzip vorgesehen wird. In seinen *Grundlagen der Arithmetik* (*Grl*), fasst er seine Forderung im Inhaltsverzeichnis für § 46 so an:

> Eine Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriffe (*Grl* § 46)

und führt aus:

> Wenn ich sage, “der Wagen des Kaisers wird von vier Pferden gezogen”, so lege ich die Zahl vier dem Begriffe “Pferd, das den Wagen des Kaisers zieht” bei.

In einer modernen Schreibweise:

四*x*[*x* ist ein Pferd und *x* zieht den Wagen des Kaisers]

Hier ist der Begriff 四$x[\Phi(\mathrm{x})]$ ein Begriff zweiter Stufe, der durch einen Begriff erster Stufe gesättigt wird. Wer chinesische Schriftzeichen kennt, weiß, dass ‘四’ das chinesische Zeichen für ‘vier’ ist. Wir haben es hier verwendet, weil das bei uns sonst bekannte Zeichen ‘4’ für ein anderes Zweck gebraucht wird und weil wir Mehrdeutigkeit vermeiden wollen.

Warum aber sind Zahlen dann nicht Quantoren, Begriffe zweiter Stufe, wie unser ‘四$x[\Phi(\mathrm{x})]$’ hier? So haben einige Logiker, etwa Whitehead und Russell, Church, diese eingestuft. Frege bleibt dabei: Weil Zahlen eben Gegenstände sind!

Frege muss daher den Übergang von 四$x[\Phi(\mathrm{x})]$ zum Eigennamen ‘4’ schaffen. Das geschieht über eine *unmittelbare* Äquivalenz (*Grl* § 57)

QG 四$x[\Phi(x)] \leftrightarrow \mathrm{Z}x[\Phi(x)] = 4$

Es gibt vier Evangelisten genau denn, wenn die Anzahl der Evangelisten gleich vier ist. Es kommt jetzt darauf an, den gegenstandsbildenden Operator $\mathrm{Z}x[\Phi(x)]$ (in Worten: die Anzahl der x derart, dass $\Phi(x)$) zu definieren.

3. Zahldefinitionen

In einem ersten Anlauf (*Grl* § 64) schlägt Frege folgendes vor als Versuch anzugeben, was die Zahlen sind, indem er angibt, unter welchen Bedingungen zwei Zahlen gleich sind:

KP $\mathrm{Z}x[\Phi(x)] = \mathrm{Z}y[\Psi(y)] \leftrightarrow \mathrm{Zgl}\, z[\Phi(z), \Psi(z)]$

In Worten:

> die Zahl der Φ = die Zahl der Ψ genau dann, wenn es genauso viele Φ als Ψ gibt

Diese Äquivalenz, die ich das *Kardinalitätsprinzip*[1] nenne, enthält das Minimum, das man von einem Begriff verlangen kann, der die Zahlen als Gegenstände darstellt.

Frege aber leht diesen Versuch ab (*Grl* § 66), weil er das (später) sogenannte Cäsar-Problem nicht lösen kann. Die Äquivalenz KP sagt nämlich nichts darüber, wie allgemein der Wahrheitswert einer Identität der Form

$$\mathrm{Z}x[\Phi(x)] = a$$

für beliebige Eigennamen *a* zu bestimmen ist. Daher kann sie nicht entscheiden, ob die Anzahl der Planeten gleich oder ungleich Julius Cäsar ist.

In einem zweiten Anlauf daher (*Grl* § 68) zieht Frege folgende Definition an:

EDZ $\mathrm{Z}x[\Phi(x)] = \mathrm{U}\theta[\equiv z[\Phi(z), \theta(z)]]$

wo '≡' die Gleichzahligkeit zweier Begriffe bedeutet und 'U' den Umfangsoperator (zweiter Stufe) ist: $\mathrm{U}\theta[\mathfrak{F}z[\theta(z)]]$ ist der Umfang der Begriffe θ derart, dass $\mathfrak{F}(\theta)$, oder in Frege's argumentstellenandeutender Schreibweise, $\mathfrak{F}z[\theta(z)]$. Das Problem dieser Definition liegt allein darin, dass es nicht klar ist, was ein Umfang ist, insbesondere der Umfang eines Begriffs zweiter Stufe, wo also Begriffe erster Stufe unter (oder "in") diesen Begriff fallen. Es sei beispielsweise $\Phi(z)$ der Begriff '*z* ist ein Evangelist'. Dann "enthält" $\mathrm{U}\theta[\equiv z[\Phi(z), \theta(z)]]$ diejenigen Begriffe, unter denen genau vier Gegenstände fallen, und ist somit nach Freges Bestimmung die (An)Zahl 4.

Zwischen 1884 und 1892 revidierte Frege seine Logik dahingehend, dass er die Begriffe als einstellige Funktionen in die zwei Wahrheitswerte neu konzipierte, und Wertverläufe von Funktionen als Verallgemeinerung der Umfänge von Begriffen deutete. Somit wird der Umfang eines Begriffs der Wertverlauf einer Funktion in die Wahrheitswerte, ein Sonderfall also. Zahlen sind Umfänge, Umfänge sind Wertverläufe, Wertverläufe sind logische Gegenstände, also sind Zahlen logische Gegenstände. In seinem dritten Anlauf daher (*Gg* § 40) werden Zahlen so definiert, dass die Funktion 'die Zahl von' nunmehr eine Funktion *erster* Stufe wird, die für alle Gegenstände definiert wird, aber nur "interessant" ist für diejenigen Gegenstände, die die Umfänge von Begriffen sind:

> $\mathbb{N}u$, die (An)Zahl, die dem Gegenstande *u* zukommt =Df. Der Wertverlauf der Wertverläufe *w*, für die es eine Bijektion gibt zwischen den

[1] Im Kommentarliteratur wird es meistens nach Boolos *Humes Prinzip* genannt, was auf einer Fussnote in *Grl* § 63 zurückgeht. Hume aber vergleicht nicht Dinge, die unter Begriffen fallen, sondern die Einheiten, die (angeblich) in Zahlen selbst vorkommen, so dass etwa 2 plus 3 die gleiche Anzahl von Einheiten enthält wie 12 – 7, nämlich fünf. Frege argumentiert vehement gegen diese Auffassung der Zahl als aus Einsen bestehend; umso merkwürdiger ist es also, dass er Hume als Zeuge seiner eigenen Auffassung heranzieht.

Gegenständen, die unter *w* und denjenigen, die unter *u* fallen.

Mit dieser Definition gab sich Frege bis zur Entdeckung des Widerspruchs zufrieden.

Zahlen sind nicht nur irgendwelche Gegenstände, sie sind *logische* Gegenstände, weil ihre Anwendung (Zahlangaben) universell ist: sie geniessen maximale Allgemeinheit in der Anwendung (wie die Gesetze der Logik), daher müssen die Zahlen durch rein logische Operationen definiert werden; dazu gehören – nach Auffassung Freges – die Begriffsumfänge (Wertverläufe). Also sind Erkenntnisse der Arithmetik und der Analysis nicht nur a priori, sondern auch analytisch (nach einer erweiterten, nicht-Kantischen Auffassung der Analytizität). Auf dieser Weise meinte Frege, sein Leibniz'sches Programm des Logizismus zu erfüllen. Dazu aber bedurfte es eine bessere Logik, was zu Freges Entwicklung seiner Begriffsschrift geführt hat.

4. Freges Theorem und das schottische Programm

Aus KP allein folgt – in einer Prädikatenlogik zweiter Ordnung (L2O) – die Peano-Arithmetik zweiter Ordnung. Dieses Ergebnis, das inzwischen allgemein als *Freges Theorem* bezeichnet wird, ist unabhängig von der defekten Definition der Zahlen über die Wertverläufe und Grundgesetz V und dient daher als Ansatzpunkt für Versuche, möglichst viel von Freges Programm in seinem Sinne zu retten (Parsons 1965, Wright 1983, Heck 1993, vgl. Boolos 1998, Teil II).

Falls also KP eine logische oder analytische Wahrheit ist, hat Frege den Logizismus für die Dedekind–Peano Arithmetik bewiesen. Ist KP aber logisch oder analytisch?

"Ja!" lautet die Antwort von Crispin Wright und Bob Hale, die einige Jahre lang in Schottland zusammenarbeiteten, und dessen neo-Fregesche Programm ich daher als das 'schottische' bezeichne. (Wright 1983, Wright & Hale 2001). KP ist nach der schottischen Auffassung analytisch, eine Art "implizite Definition" des Begriffs $Zx[\Phi(x)]$; die Äquivalenz KP führt Zahlen als Gegenstände ein. In Antwort auf das Cäsar-Problem, führen Wright und Hale aus, dass dieses eine Folgerung ist, mit der man – halt – leben muss. Freges Erwiderung darauf wäre, dass es in dem Fall nicht um wohldefinierte Gegenstände handelt, worauf die Antwort kommt, dass abstrakte Gegenstände wie Zahlen usw. einfach nicht in derselben Weise vollkommen in allen Hinsichten bestimmt sind wie konkrete Gegenstände.

5. Abstraktionsprinzipien

KP ist eine Art von Äquivalenz, die in der Betrachtung vermeintlich abstrakter

Gegenstände häufig auftritt. Diese sind im einfachsten Fall Äquivalenzen der Form

ÄS1 $\S(a) = \S(b) \leftrightarrow a \text{ Ä } b$

Hier soll Ä eine Äquivalenzrelation über den Gegenstandsbereich sein, in dem Namen wie '*a*' und '*b*' ihre Denotata haben. § ist eine Funktion, deren Werte ebenfalls Gegenstände sind, deren Identitätsbedingungen durch ÄS1 gegeben sind. Wir nennen die Gegenstände wie *a* und *b* (relative) *Konkreta* (in bezug auf Ä), die "neuen" Gegenstände §(*a*), §(*b*) (relative) *Abstrakta* (in bezug auf Ä). Freges Beispiel (*Grl* § 64) nimmt Geraden als Konkreta an, das Parallelsein als Äquivalenzrelation, und liefert Richtungen als Abstrakta:

PAR die Richtung von a = die Richtung von $b \leftrightarrow a \parallel b$

Weitere, logisch analoge Abstraktionsschemata gelten für Funktionen. Wenn *F* und *G* zwei Funktionen sind, die in einer Beziehung höherer Ordnung stehen, die einer Äquivalenzrelation analog ist, dann gibt es hier auch Abstrakta, die Gegenstände sind, nach dem Schema

ÄS2 $\P x[F(x)] = \P y[G(x)] \leftrightarrow \text{Ö}x[F(x),G(x)]$

und Ähnliches gilt für Relationen von zwei oder mehr Stellen, z.B.:

ÄS3 $\$xy[R(x,y)] = \$zw[S(z,w)] \leftrightarrow \text{Ï}xy[R(x,y),S(x,y)]$

Es sind hier zwei wichtige Charakteristika dieser Äquivalenzen zu bemerken. Sie (die Äquivalenzen) sind logischer Natur, d.h., sie gelten notwendigerweise. Darüber hinaus aber, sind die zwei Seiten nicht nur logisch äquivalent, sie sind (als ganze Sätze) synonym oder sinngleich. Frege sagt zu PAR:

> Wir ersetzen […] das Zeichen || durch das allgemeinere =, indem wir den besonderen Inhalt des ersten an *a* und *b* *vert*heilen. Wir zerspalten den Inhalt in anderer als der ursprünglichen Weise und gewinnen dadurch einen neuen Begriff. (*Grl*, § 64)

Der Sinn dieser Einschränkung zeigt sich durch ein Beispiel. Falls man KP als eine logische Wahrheit akzeptiert, ist es ebenfalls eine logische Wahrheit, dass

KP+2 $\mathrm{Z}x[\Phi(x)] + 2 = \mathrm{Z}y[\Psi(y)] + 2 \leftrightarrow \mathrm{Zgl}\ z[\Phi(z), \Psi(z)]$

aber die zwei Seiten dieser Äquivalenz sind nicht synonym, und man kann die linke Seite nicht aus dem rechten allein durch eine "Neuzerspaltung" gewinnen.

Zweitens, durch die Einführung der Wertverläufe erzielt Frege eine bemerkenswerte Vereinfachung der hier angedeuteten Vielfalt der Abstraktionsprinzipien, indem er Begriffe und Beziehungen seines logischen Systems nunmehr als einfache oder doppelte Wertverläufe definiert. Dass diese

Vereinheitlichung auf Kosten der Konsistenz des Systems ging mindert indes die Virtuosität seiner Definitionen nicht. Sie ist am besten mit der späteren Vereinheitlichung der Grundlagen der Mathematik auf der Basis der Mengentheorie zu vergleichen.

6. Deren Status

Die zwei Seiten der Abstraktionsäquivalenzen sollen nach Frege sowie nach dem schottischen Programm analytisch äquivalent sein. Aber sie gehen anscheinend verschiedene ontologische Verpflichtungen ein. Während etwa die rechte Seite von PAR nur von Geraden spricht, handelt die linke Seite sowohl von Geraden als auch von deren Richtungen.

Falls Sätze logisch äquivalent sind, gehen sie die gleichen ontologischen Verpflichtungen ein. Wenn die zwei Seiten von KP und verwandte Äquivalenzen verschiedene Verpflichtungen eingehen, dann sind sie nicht äquivalent. Falls die Verpflichtung auf beiden Seiten doch gleich ist, dann stellt sich die Frage: verpflichten sie zu abstrakten, platonischen Gegenständen oder nicht? Wright und Hale sagen, dass beide Seiten platonistische Verpflichtungen eingehen, nur dass auf der rechten Seite diese Verpflichtungen nicht transparent sind, während sie auf der linken, synonymen Seite klar zum Vorschein kommen. Ich meine hingegen, dass die rechte Seite keine platonistische Verpflichtungen eingeht, so dass die linke Seite, falls mit der rechten synonym ist, ebenfalls nicht platonistisch ist. Das blosse Vorhandensein der Äquivalenzen entscheidet dieses Disput nicht.

Die Fortsetzung des schottischen Programms nach der (vermeintlichen) "Eroberung" der natürlichen Zahlen sieht vor, dass weitere Teile der Mathematik über Abstraktionsprinzipien in der Logik zweiter Ordnung hergeleitet werden. Dies soll geschehen für die reelle Zahlen zum Beispiel bei Hale (Hale 2000), und somit diese Theorie neologizistisch oder abstraktionistisch "gründen". Hales Konstruktion der reellen Zahlen aber verlangt zu viel von den nichtmathematischen Quantitäten, die als Konkreta dazu dienen sollen, und übersieht, dass die Anwendung der reellen Zahlen für Messungszwecke eine Isomorphie zwischen Quantitätsbereichen und Zahlen nicht erforderlich ist. (Batitsky 2002). Es ist eine durchaus interessante Frage, wie weit eine abstraktionistische Rekonstruktion mathematischer Theorien im Geiste Freges betrieben werden kann (Fine 2002), aber die metamathematischen Komplikationen, die dadurch entstehen zeigen, dass die Frage nicht einfach zu beantworten ist (Shapiro 2004).

GgV selbst ist ein Abstraktionsprinzip, das zu Widersprüchen führt. Es können also nicht alle Abstraktionsprinzipien logisch akzeptabel sein, sie sind im voraus suspekt, weil sie sich in solcher "schlechten Gesellschaft" finden. Damit ein Abstraktionsprinzip akzeptabel sein kann, muss es nachweisbar (relativ) konsistent zu einer unproblematischen Theorie sein. Als Kriterium wird vorgeschlagen, dass "anständige" Abstraktionsprinzipien konservativ sein sollen (Hale–Wright 2001, 133). Es gibt aber nachweislich (Weir 2003) Paare von Abstraktionsprinzipien, die einzeln konservativ aber zusammen inkonsistent sind, so dass Konservativität allein kein Garant für "Anständigkeit" ist.

7. Wovon sind Zahleigenschaften Eigenschaften?

Nach Frege sind Zahleigenschaften (wie *vier zu sein*) Eigenschaften von Begriffen (*Grl* § 46): der Begriff – *ist ein Evangelist* fällt unter dem Begrriff zweiter Stufe 四$x[\Phi(x)]$. Diese Auffassung ist aber sehr unnatürlich (Husserl 1891). Im Alltag sowie in der elementaren Pädagogik gehen wir davon aus, dass das, was vier ist (sind), weder der Begriff 'x ist ein Evangelist', der selbst nicht vier, sondern *ein* Begriff ist (unter dem vier Gegenstände fallen), noch die Menge {Matthäus, Markus, Lukas, Johannes} die *eine* Menge ist (die vier Elemente hat). Was vier *sind*, sind *die* Evangelisten (Mehrzahl!) Mehrere Gegenstände sind keine Menge (außer im alltäglichen Sinn) sondern das, was Cantor (1932, S. 443) eine *Vielheit* nennt. Wir sollen daher die Eigenschaft, vier zu sein, von dieser Vielheit prädizieren, nach der einfachen Form

IV(die Evangelisten)

wo 'IV' ein nicht-distributives Prädikat *erster* Stufe ist, die folgende Bedingung genügt:

für alle a gilt: IV(a) ↔ 四x[x ist eines von den a]

Das bedeutet, dass wir, in Kontrast zu Frege, um Zahlaussagen richtig ausdrücken zu können, *Pluralterme* einführen müssen (Simons 2xxx). Diese Modifikation (eigentlich in manchen Hinsichten eine Rückkehr zur Tradition) hat weitreichende Folgen. Freges vorlogischer Fehler war, als nominelle Terme nur Singularterme zuzulassen. Pluralterme sind aber in der natürlichen Sprache reichlich vorhanden. Wir können somit Zahleigenschaften als Eigenschaften von Vielheiten betrachten.

8. Reform der Logik

Wir sollen daher in Kontrast zu Frege die Logik mit denotativ uneingeschränkten Termen erweitern. Eine solche Logik gibt es bereits, nämlich die sogenannte *Ontologie* von Stanisław Leśniewski (erfunden zirka 1920: vgl. Lejewski 1958). Um aber die Peano-Arithmetik aus der Ontologie abzuleiten, müsste man wie Whitehead und Russell die Existenz unendlich vieler Individuen annehmen (Unendlichkeitsaxiom), was dem Logizismus zuwider läuft. Nach Leśniewski – und mit ihm stimme ich überein – ist es keine Sache der Logik, wieviele Individuen es gibt: Die Logik soll ontologisch neutral bleiben. Die Ontologie aber beschränkt sich auf Pluralterme erster Ordnung, d.s. Terme, die mehrere Individuen bezeichnen. Es gibt aber Gründe, sowohl linguistische als auch logische, diese Einschränkung aufzuheben und superplurale Terme zuzulassen (Simons 2014), wie aus folgenden Beispielen hervorgeht:

- Rodgers und Hammerstein sowie Rodgers und Hart schrieben Musicals, also gibt es mindesten zwei Paare, die zusammen Musicals schrieben.
- Whitehead und Russell sowie Hilbert und Bernays schrieben mehrbändige Bücher zu den Grundlagen der Mathematik, also gibt es mindestens zwei Paare, die zusammen mehrbändige Bücher zu den Grundlagen der Mathematik schrieben.

Die Anzahl der Paare ist jeweils zwei, also können wir nicht nur Individuen, sondern Vielheiten von Individuen unterscheiden und zählen. Hier handelt es sich nicht um zwei verschiedene Zahlen Zwei, sondern um zwei Anwendungen der Zahl Zwei auf unterschiedliche Dinge, einmal Individuen, einmal Gruppen von Individuen. Eine solche Anwendung machen wir jedesmal, wenn wir sagen, das vier Gruppen von drei Individuen insgesamt in der Anzahl gleich drei Gruppen von vier Individuen, was hinter der alltäglichen Erklärung der Gleichung $4 \times 3 = 3 \times 4$ steckt.

Lässt man solche Vielheiten höherer Ordnung zu, so lässt sich die Peano-Arithmetik aus einer viel schwächeren empirischen Annahme ableiten, nämlich, dass es mindestens zwei Individuen gibt. Wir wissen (*pace* Parmenides), dass diese Annahme wahr ist, so dass die Peano-Arithmetik in unserer pluralistischen Welt gilt.

9. Neoformalismus

Nach der Entdeckung der Unvollständigeit vieler logischen Systeme durch Gödel wissen wir, dass die logische Folgerung nicht beweistheoretisch sondern semantisch verstanden werden muss, und zwar im Sinne von Bolzano und Tarski:

p folgt aus A gdw. alle Modelle von A Modelle von p sind

Dieses Ergebnis wusste Frege nicht, weswegen er noch glauben konnte, dass die logische Folgerung adäquat durch ein axiomatisches Logiksystem angegeben werden konnte. Freges mathematischer Platonismus stand dem Formalismus gegenüber. Zu seiner Zeit war der Formalismus eine stark unterentwickelte und schlecht formulierte These. Erst durch David Hilbert kam es zu einer etwas präziseren Formulierung der Idee des Formalismus: Die reine Mathematik bestünde demnach aus Sätzen, die aus konsistenten

Annahmegruppen logisch folgen. Hilberts Ansatz beruht jedoch auf einer vor-Gödelschen Auffassung der logischen Folgerung, sowie über eine überoptimistische Einstellung zu Konsistenzbeweisen, so dass die Resultate Gödels dieser Version des Formalismus einen Strich durch die Rechnung machten.

Im Folge kam man allgemein zur Auffassung, es können Modelle nur durch Mengen oder sonstigen abstrakten Gegenstände konstruiert werden. Für einen Nominalisten wie – im Privaten – Tarski war diese Zwiespalt zwischen seinen ontologischen Intuitionen und den anscheinend erforderlichen Werkzeugen der Modelltheorie schlichtweg ein Greuel. Eine modernisierte Version des Formalismus wird neuerdings von Alan Weir vertreten (Weir 2010), aber er bleibt noch – ungünstigerwiese – bei einem beweistheoretischen Verständnis der logischen Folgerung. Wenn aber Modelle auf der Grundlage von Vielheiten höherer Ordnung konstruiert werden kann, dann braucht man überhaupt keine platonistischen Annahmen zu machen, um den Begriff der logischen Folgerung in der akzeptierten Weise zu definieren. Es kann somit der Formalismus wieder aufleben. In diesem Sinne ist die (reine) Mathematik wahrlich "a subject without an object" (Burgess–Rosen 1997).

10. Frege: Freund oder Feind?

Freges Leistung in der Philosophie der Mathematik sowie in der Logik ist unübertroffen. Er war der erste, der uns die Werkzeuge geliefert hat, die seinen Logizismus prüfen konnte, und die moderne Logik eingeführt hat. Er hat mit fast perfektem Beispiel gezeigt, wie eine axiomatische Prädikatenlogik zweiter Ordnung zu machen ist. Er hat neue Massstäbe für Genauigkeit in der Logik gesetzt.

Dennoch sind manche seiner philosophischen Auffassungen über Logik und Mathematik überholt oder mindestens fraglich. Sein starker Platonismus soll abgelehnt werden, aber die Mathematik muss nicht deswegen konstruktiv behandelt werden, sondern – im Sinne Hilberts – als das, was aus konsistenten Annamegruppen (Postulaten) folgt (Formalismus redivivus). Der syntaktische Formalismus ist von Gödel widerlegt worden, aber mit der Annahme von Vielheiten höherer Ordnung kann ein semantisch verstandener Formalismus nominalistisch expliziert werden. Dazu bedarf es eine *radikale* Erweiterung der Logik Freges und sogar Leśniewskis, in der eine Vielheitstheorie als Teil der Logik die Mengenlehre ersetzt. Diese kann durchaus im Geiste Freges geschehen und aus seinen Fehlern lernen.

Literaturverzeichnis

1. Batitsky, V. Some Measurement-Theoretic Concerns about Hale’s ‚Reals by Abstraction’. Philosophia Mathematica 10 (2002), 286–303.
2. Boolos, G. Logic, Logic, and Logic, Harvard University Press: Cambridge, Mass. 1998.
3. Burgess, J. P. und Rosen, G. A Subject without an Object. Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics, Clarendon: Oxford 1997.
4. Cantor, G. Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophische Inhalts, Springer: Berlin 1932.
5. Fine, K. The Limits of Abstraction. Clarendon: Oxford 2002.
6. Frege, G. Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Koebner: Breslau 1884.
7. Frege, G. Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. Pöhle: Jena, Bd. 1 1893, Bd. 2 1903.
8. Hale, B. Reals by Abstraction, Philosophia Mathematica 8 (2000), 100–123. Nachdruck in Hale und Wright 2002, 399–420.
9. Hale, B. und Wright, C. The Reason’s Proper Study. Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics, Clarendon: Oxford 2002.
10. Heck, R. G. The Development of Arithmetic in Frege’s Grundgesetze der Arithmetik. Journal of Symbolic Logic 58 (1993), 579–601.
11. Lejewski, C. On Leśniewski’s Ontology, Ratio 1 (1958), 150–176.
12. Parsons, C. Frege’s Theory of Number, in M. Black, Hg., Philosophy in America, Cornell University Press: Ithaca 1965, 180–203.
13. Shapiro, S. The Nature and Limits of Abstraction. Philosophical Quarterly 54 (2004), 166–174.
14. Simons, P. The Ontology and Logic of Higher-Order Multitudes, in M. Carrara, F. Moltmann and A. Arapinis, Hgg., Plurality and Unity. New Essays in Logic and Semantics, Clarendon: Oxford 2014 (im Erscheinen).
15. Weir, A. Neo-Fregeanism: An Embarrassment of Riches, Notre Dame Journal of Formal Logic 44 (2003), 13–48.
16. Weir, A. Truth through Proof: A Formalist Foundation for Mathematics. Clarendon: Oxford 2010.
17. Wright, C. Frege’s Conception of Numbers as Objects. Aberdeen University Press: Aberdeen 1983.

Prof. Dr. Dr. h.c. Peter Simons
Department of Philosophy

Trinity College Dublin
Dublin 2
Ireland
E-Mail: psimons@tcd.ie